

# ラブルパイル天体の振動モードを用いた 破壊ダイナミクスに関する考察

中条俊大<sup>1)</sup>・森治<sup>2)</sup>・川口淳一郎<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻 <sup>2)</sup> ISAS/JAXA

Study on fracture dynamics of rubble pile asteroids based on vibration mode analysis

Toshihiro CHUJO<sup>1)</sup>, Osamu MORI<sup>2)</sup> and Junichiro KAWAGUCHI<sup>2)</sup>

## Abstract

When considering an impact mission to an asteroid that may potentially collide with the Earth, it is important to understand structural dynamics of the asteroid that enables to make a strategy to determine an appropriate impact point and incident angle, only with rough observation and in a limited time. Such a systematic understanding is realized by extending natural vibration mode analysis.

This study focuses on rubble pile asteroids, and models them by a group of spherical particles in the same way as Discrete Element Method (DEM). Based on the model, vibration mode analysis can be formulated by linearizing the equations of motion around an equilibrium state where particles are bound together by gravitational force. The natural vibration mode is usually used for vibration motion, but it can also be extended to analyze behavior at the beginning of fracture. This idea is applied to systematic approach to make an impact strategy.

Key Words: Rubble pile asteroids, impact, fracture dynamics, natural vibration mode, Discrete Element Method

(2017年4月28日受付, 2017年5月10日受理)

# ラブルパイル天体の振動モードを用いた破壊ダイナミクスに関する考察

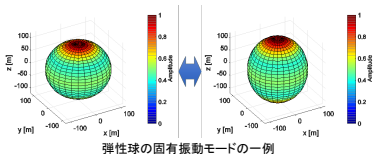
シンポジウム「天体の地球衝突問題にどう取り組むか」  
2017/02/28  
中条 俊大(東京大学),  
森 治(JAXA), 川口 淳一郎(JAXA)

## 1 背景と目的 振動モードと破壊の関係

物体(固体)の振動を周波数ごとに分解したときのそれぞれの振動形状を固有振動モードという。振動モードを用いると、(線形振動するという仮定のもと)ダイナミクスが体系的に理解される。

例えば地球や月は連続体としての弾性球とみなして解析され、体系的に解くことができる。

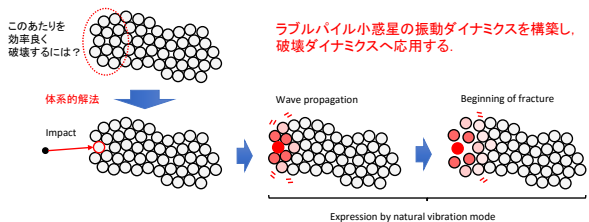
破壊ダイナミクスは非線形性が大きく、解析は数値計算に頼るところが大きい。  
振動モードを応用して破壊ダイナミクスを体系的に理解できるのではないかと?



## 1 背景と目的 目的

ラブルパイル小惑星の振動と破壊に関する新しいダイナミクスの提案。

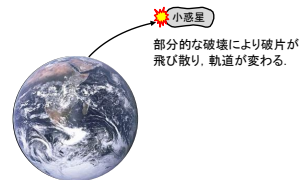
インパクターの衝突などの外的要因に対する応答を知ることで、ある対象天体の効率良い破壊(または振動励起)を行う条件を体系的に短時間で得ることができる。



## 1 背景と目的 小天体のダイナミクスの理解の必要性

地球に衝突する恐れがある小天体に、部分的な破壊、軌道変更を目的としてインパクターを衝突させるとき、どこにどう衝突させればよいのか?

特に、ラフな観測情報、限られた時間の中でどのような戦略を立てるべきか?  
適切な衝突点、衝突角度があるはず。  
体系的に知るためには、小天体の(構造的な)ダイナミクスの理解が必要。



## 1 背景と目的 振動モードと破壊の関係

ラブルパイル小惑星(自己重力で集積した岩塊、砂礫群)についてはダイナミクスは整理されておらず、挙動解析は数値計算(DEMなど)に頼りがちである。

DEMは破壊現象の解析にも適している。

ここでは特に自己重力で集積した岩塊、砂礫群としてのラブルパイル小惑星に注目し、その破壊ダイナミクスと破壊ダイナミクスへの応用について考える。

DEM (Discrete Element Method)

空間に粒子(並進、回転6自由度)を多数配置し、自由に運動させ、粒子同士が接触すると、適切な相互作用を与えて反発させる。粉体の挙動を模擬するのによく使われる手法。

粉体層への貫入のシミュレーション(和田)

ラブルパイル同士の衝突シミュレーション(Takeda and Ohtsuki)

## 2 粒子群の挙動の基本原則とモデル化 粒子間相互作用

粒子は全て一様な球であるとし、粒子同士の接触モデルはDEMのフォークモデルと同様であるとする。

法線方向: ヘルツの接触理論に従ったバネ  
接線方向: ミンドリンの理論に従ったバネ

$$F_n = k_n \delta_n^{\frac{3}{2}}$$

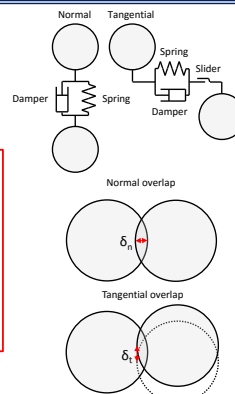
法線方向のバネによる反発力

$$F_t = k_t \delta_t \delta_n^{\frac{1}{2}}$$

接線方向のバネによる反発力

バネ定数 $k_n$ ,  $k_t$ は粒子の物性(ヤング率など)によって決まる。  
ダンパー、スライダによる力は、反発係数 $e$ 、摩擦係数 $\mu$ にしたがうように定められる。

さらに、全ての粒子間に万有引力を作用させる。



2 粒子群の挙動の基本原理とモデル化  
粒子群の剛性

つり合い点まわりで線形化すると、粒子群の剛性が求まる。

例えば法線方向の反発力について(\*はつり合い状態を示す)。

$$F_n = k_n \delta_n^{\frac{3}{2}} \quad \leftarrow \text{基本の式}$$

$$F_n^* = k_n \delta_n^{\frac{3}{2}} \quad \leftarrow \text{つり合い状態}$$

$$F_n \approx F_n^* + \frac{3}{2} k_n \delta_n^{\frac{1}{2}} (\delta_n - \delta_n^*) \quad \leftarrow \text{つり合い点周りの近似式}$$

剛性

$\delta_n^*$ は粒子群の中の位置によって変化する。  
つまり、**万有引力で結合された粒子群は、剛性分布を持つ連続体のような挙動をする。**

3 固有振動モード解析  
質量マトリクスと剛性マトリクス

微小変形領域では振動が起こる。  
**固有振動モード解析**を行う。

自由振動の運動方程式

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

M: 質量マトリクス  
K: 剛性マトリクス  
q: 変位ベクトル

Kは各粒子のつり合い状態によって求まる。

3 固有振動モード解析とスケーリング則  
質量マトリクスと剛性マトリクス

粒子間の各相互作用をつり合い点回りで線形化し、剛性マトリクスを求める。

法線方向の反発力

$$F_{ij} = k_n |s_{ij}|^{\frac{3}{2}} \delta_{ij}$$

$$dF_{ij} = \frac{k_n}{|r_{ij}|} \left[ |s_{ij}|^{\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2} |r_{ij}| + \frac{3}{2} |r_{ij}| \frac{|r_{ij} \cdot dr_{ij}|}{|r_{ij}|} \right) \right]$$

接線方向の反発力(滑りはないと仮定、トルク含む)

$$F_{ij} = k_t |s_{ij}| \delta_{ij}$$

$$dF_{ij} = k_t |s_{ij}| \left[ dr_{ij} \cdot \frac{(r_{ij} \cdot dr_{ij}) r_{ij}}{|r_{ij}|^3} - \left( |r_{ij}| d\theta + |r_{ij}| d\theta \right) \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|} \right] - \frac{k_t (r_{ij} \cdot dr_{ij}) s_{ij}}{2|r_{ij}| |s_{ij}|^2}$$

$$T_i = a_i \times F_{ij}$$

$$dT_i = \frac{k_t |s_{ij}|}{|r_{ij}|} \left[ \frac{|r_{ij}| (r_{ij} \cdot dr_{ij})}{|r_{ij}|^3} - \frac{k_t (r_{ij} \cdot dr_{ij}) s_{ij}}{2|r_{ij}| |s_{ij}|^2} \right] + k_t |s_{ij}| \left[ \frac{|r_{ij}| (r_{ij} \cdot dr_{ij})}{|r_{ij}|^3} - \left( |r_{ij}| d\theta + |r_{ij}| d\theta \right) \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|} \right]$$

3 固有振動モード解析  
球形をなす粒子群の固有振動モード

例として、**全体が球形をなす粒子群モデル**に対して固有振動モード解析を行う。

粒子同士が重ならないように粒子を配置する。

全ての粒子間に万有引力を作用させ、1つの粒子群として結合させる。

粒子同士の接触時の減衰によって全体の力学的エネルギーが減衰する。

全体の力学的エネルギーが定常状態になったときの状態をつり合い状態とする。

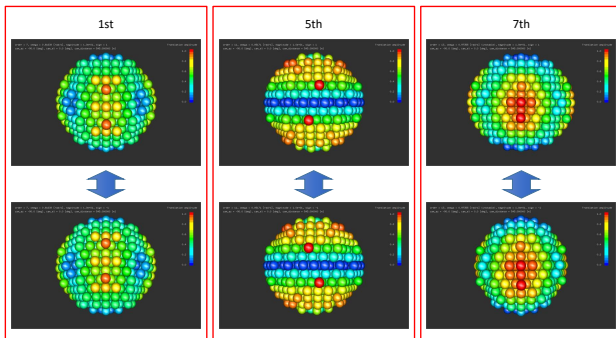
全ての組み合わせで力の微分を求め、剛性マトリクスを求める。

固有振動モード、固有振動数を求める。

	値	単位
ヤング率	5.0	GPa
ポアソン比	0.33	-
密度	2000.0	kg/m <sup>3</sup>
直径	20.0	m
粒子数	907	-

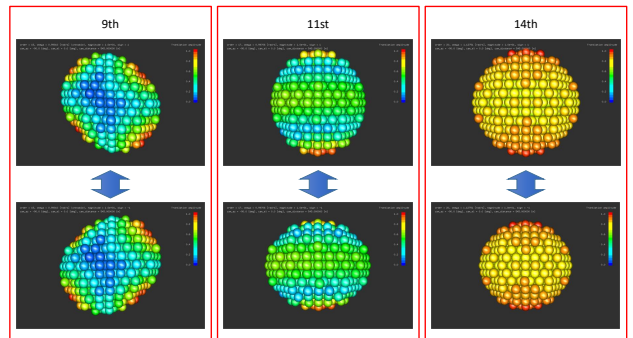
3 固有振動モード解析  
球形をなす粒子群の固有振動モード

低次の固有振動モード一覧(粒子の色は振幅の大きさを表す)



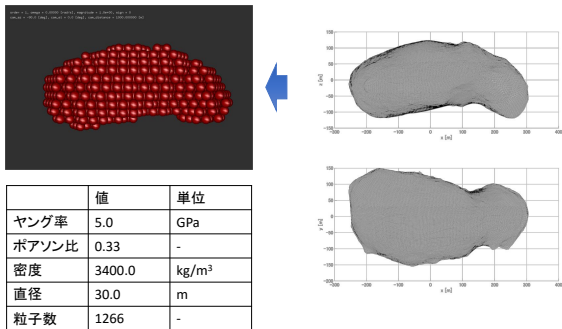
3 固有振動モード解析  
球形をなす粒子群の固有振動モード

低次の固有振動モード一覧(粒子の色は振幅の大きさを表す)



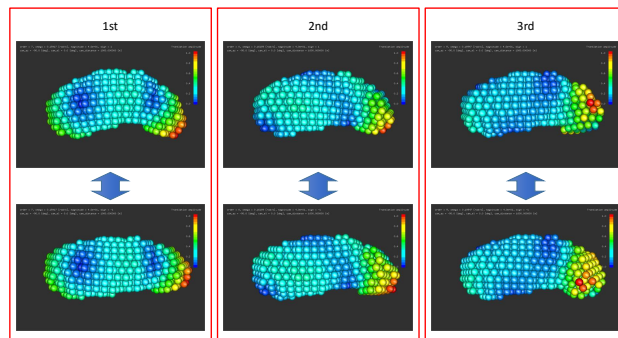
3 固有振動モード解析  
イトカワの外形をなす粒子群の固有振動モード

同様の解析を、イトカワの外形をなす粒子群に対して行う(Gaskellモデルに基づく)。



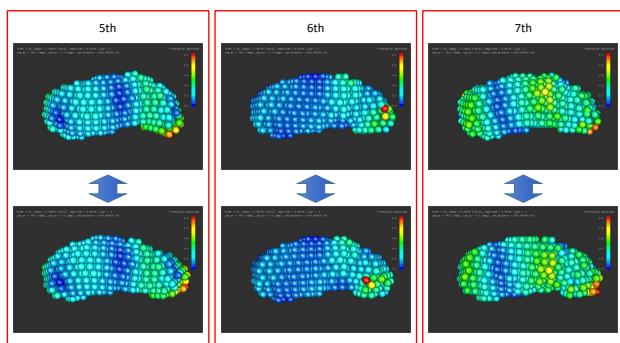
3 固有振動モード解析  
イトカワの外形をなす粒子群の固有振動モード

低次の固有振動モード一覧(粒子の色は振幅の大きさを表す)



3 固有振動モード解析  
イトカワの外形をなす粒子群の固有振動モード

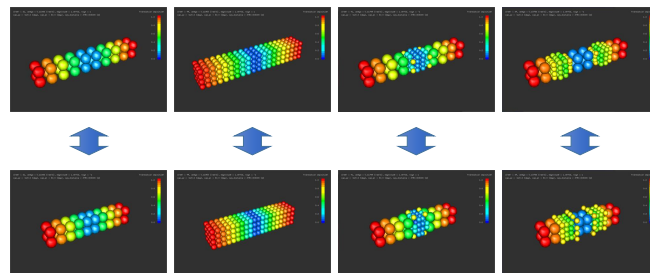
低次の固有振動モード一覧(粒子の色は振幅の大きさを表す)



3 固有振動モード解析  
固有振動モードの粒子サイズへの非依存性

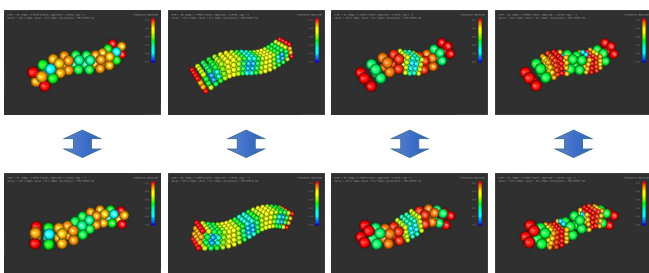
全体の外形や物理特性が似ていれば、固有振動モードは粒子サイズによらず同様となる。

対応する形状の固有振動モードが存在する(固有振動数もほぼ等しい)。



3 固有振動モード解析  
固有振動モードの粒子サイズへの非依存性

大まかな挙動解析のためには、**粒子サイズは適当でよく、モデルの詳細化と計算時間のトレードオフにより設定してよい。**

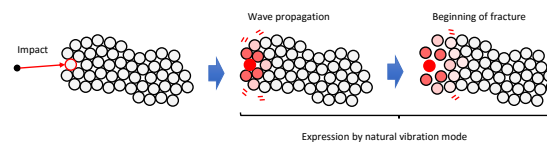


4 破壊現象の固有振動モードを用いた表現  
破壊の定義と固有振動モードとの関連

つり合い状態で静止している粒子群に、プロジェクトイルの衝突などによる外力が加わると、限界以下の範囲では、粒子群は振動を始める。  
**限界を超えると、粒子同士が離れ、振動とは異なる運動を始めるが、これを破壊と呼ぶ。**

破壊は非線形性が強く、振動とは全く別のダイナミクスであるが、その初期段階である破壊のし始めの挙動に関しては、非線形性が比較的小さく、固有振動モードにより表現できると考えられる。

破壊のし始めを固有振動モードの拡張で表現することで、破壊の評価、任意の破壊を行うための適切な初期条件の解析などが、体系的に、より簡潔に行うことができる。



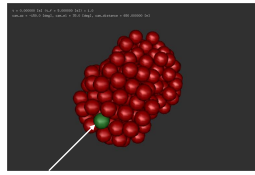
4 破壊現象の固有振動モードを用いた表現  
計算例

高い空隙率を持つ粒子群

初速度: 2.0 m/s  
反発係数: 0.6  
摩擦係数: 0.95

破壊のし始めを固有振動モードによる線形振動で表現する場合、通常のDEMによる計算結果(これを真とする)と比べてどれだけの精度で表現されるか調べる。

ある一つの粒子へのインパクトの衝突を想定し、それに初速度を与える。



	値	単位
ヤング率	5.0	GPa
ポアソン比	0.33	-
密度	3400.0	kg/m <sup>3</sup>
直径	30.0	m
粒子数	200	-

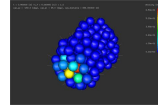
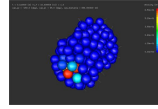
4 破壊現象の固有振動モードを用いた表現  
計算例

ひずみエネルギーが極大値を取る時刻における両者の速度の比較  
(ノルムは両者の差を通常のDEMの結果の最大値で割っている)

粒子の色は速度のノルムを表す

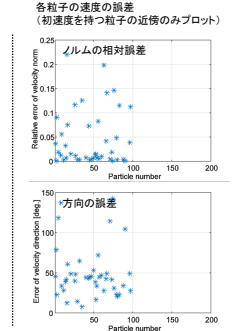
通常のDEMによる計算  
(真と考える)

固有振動モードによる計算



速度のノルムの相対誤差は概ね0.15以下である。角度の誤差は大きく、粒子によっては150°程度となっている。

ある程度の精度で表現できる。



5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

破壊のし始めは固有振動モードで近似的に表現することができる。

また、各粒子を衝突点としたとき、それぞれに対して任意の初速度の方向に対する各固有振動モードへのエネルギー配分は簡単に求まる。

したがって、表のような評価を行い、指定された破壊のし始めを実現するための適切な衝突条件を考えることができる。

ここではより正確な検討を考え、最適化計算を用いた評価を行う。

固有振動モードの次数

	1st	2nd	3rd	4th	...
衝突点 粒子	Particle 1				
	Particle 2				
	Particle 3				
	Particle 4				
	:				

衝突時のエネルギー配分

5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

ある粒子が圧縮方向に初速度を持って運動を始めると、粒子群のひずみエネルギーはある時刻で極大値を取った後、0に向かって収束していく。

これを最大化することを考えるとき、通常のDEMでは、様々な初期条件に対して計算を行い、各結果を調べて最適条件を探す方法を取るしかない。

固有振動モードにより表現されるひずみエネルギー(粒子群全体の場合)

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$$

この極大値が最大となるための最適な初速度は、最適化問題を解くことで求められる。

これが、通常のDEMによる計算結果でもひずみエネルギーを最大化することが期待される。粒子群の指定された領域を効率良く破壊するための指標の一つを与えるといえる。

5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

例: 高い空隙率を持つ粒子群(初速度は2.0 m/sとする)

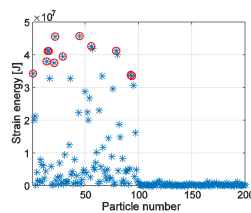
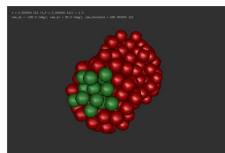
反発係数: 0.6  
摩擦係数: 0.95

緑色の粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する。

各粒子に初速度を与える場合の、それぞれの最適な初速度の方向と、最大化された値を調べる。

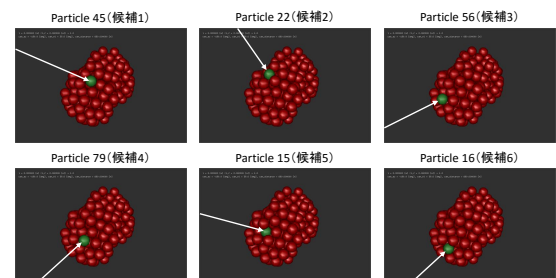
固有振動モードを用いて解いているため、これが実際(通常のDEMによる計算結果)においても最適であるとは限らない。

そこで、上位12個の粒子についてそれぞれ確認する。



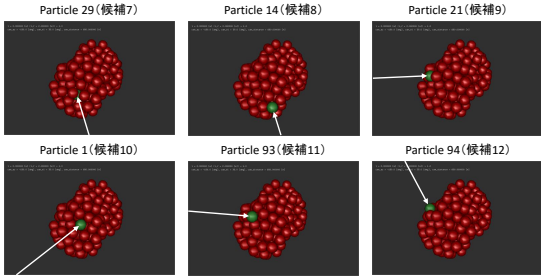
5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

上位1位から6位(候補1から6)の粒子と初速度の方向



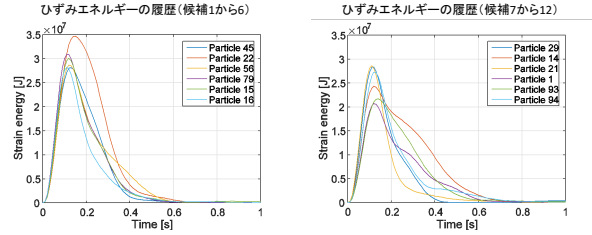
5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

上位7位から12位(候補7から12)の粒子と初速度の方向



5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

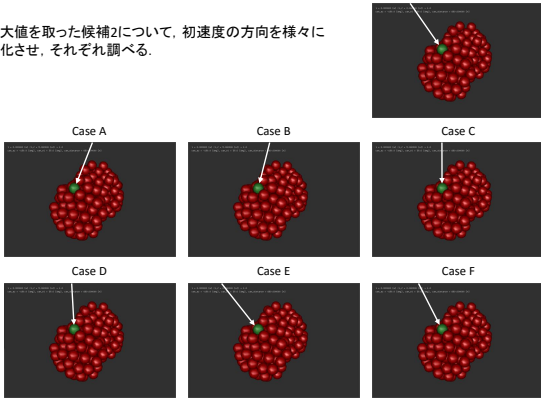
それぞれについて、通常のDEMにより計算を行う。



全体としては、固有振動モードによる計算結果と通常のDEMによる計算結果の傾向は似ている。ただし大小関係は全ては一致しておらず、例えば通常のDEMによる計算結果では候補1ではなく、候補2においてひずみエネルギーの極大値が最大値を取っている。

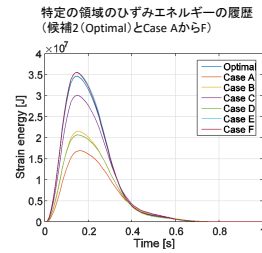
5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

最大値を取った候補2について、初速度の方向を様々に変化させ、それぞれ調べる。



5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

それぞれについて、通常のDEMにより計算を行う。



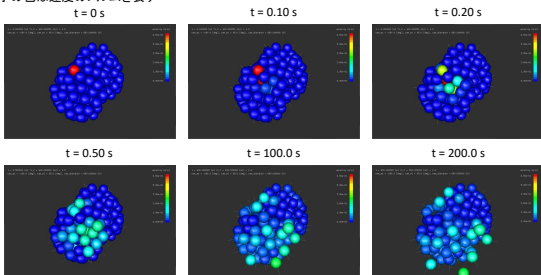
固有振動モードを用いて求めた解 (Optimal) に対して、比較的初速度の方向が似ているCase E、Case F がやや大きくほぼ同じ極大値を取るが、他の4ケースについてはより小さい。つまり、固有振動モードを用いて得られた最適解は、初速度の方向について、概ね妥当である。

5 固有振動モードを用いた振動および破壊の条件に関する考察  
指定された粒子のひずみエネルギーの極大値を最大化する場合

結果として起こる現象は、「特定の領域の中の一部の粒子のひずみエネルギーの極大値が大きくなる」である。

評価関数を他の指標で定めても同様に計算できる。

粒子の色は速度のノルムを表す



6 結論

簡潔にまとめると以下の4点である。

- DEMに基づいて振動のダイナミクスを導出し、ラブルバイル小惑星が振動し得ることを示した。
- DEMのモデル内の粒子が万有引力で結合しているという仮定のもとでは、微小変位領域での大域的挙動が粒子サイズによらないことを示した。
- 破壊のし始めの挙動を、固有振動モードにより近似的に表現できることを示した。
- 固有振動モードを用いて、指定された破壊のし始めを実現するための適切な衝突条件を簡易的に得る手法を示した。