Spaceguard Research Vol. 1, 81 - 86 (2008)
© 2008. Japan Spaceguard Association.

直線三体問題における非シュバルト周期軌道

齋藤 正也[1)]・谷川 清隆[2)]

[1)] 産業技術総合研究所システム検証研究センター
[2)] 自然科学研究機構国立天文台

Non-Schubart Periodic Orbits in Rectilinear Three-body Problem

Masaya Masayoshi Saito & Kiyotaka Tanikawa

概要

In our preceding researches for rectilinear three-body problem , we have studied the influence of families of periodic orbits which are daughter orbits of the Schubart orbits on the structure of the surface of section. Periodic orbits with certain rotation numbers have a dominant influence on the structure. However, in some mass parameters, there are orbits with relatively large stability region whose sequence of collisions is different from that of the Schubart orbit and its daughters. In the present research, we continue to employ symbol sequences and consider a general shape of the characteristic curve of families using the method to decide the location of periodic orbits on the surface of section from the distribution of symbolic sequence. In order to confirm that considered shape is correct, we numerically obtain a concrete characteristic curve for an example family.

1 はじめに

本研究は、文献[2),3)]に引き続き直線三体問題を対象とする。直線三体系とは、自由度が２の力学系のひとつであって、３粒子が重力相互作用によって直線上を運動する。

直線三体問題において、ポアンカレ写像を数値的計算して相空間の構造の数値計算によって調べる研究は、Mikkola と Hietarinta によって始められた[6),7)]。これらの研究の主な結果は、横断面が、シュバルト軌道の安定領域、系が数回の衝突で崩壊する領域、この２領域の間の軌道の振る舞いが初期値に鋭敏な領域、の３つに分かれることを発見したことである。最後の領域については、横断面を取るためのシード点の密度が低かったこともあり、特徴的な構造を発見できなかったために、彼らはカオス散乱領域と名付けたが、谷川と Mikkola[1)] は、等質量比の場合に限られるが、衝突シーケンスとして軌道を捨象することに相当する記号列を導入して、同領域が多数の三体衝突曲線で区切られることを発見した。文献[2)]では、文献[1)]で確立した記号力学の方法を利用して、横断面上の構造の質量比依存性を調べた。横断面上の典型的な構造は３節の図１に示すが、要約すると三体衝突多様体上の流れが全縮退となるでは、整った層序のアーチ型領域の層 (図における VI の領域) で構成されるのに対し、それ以外の質量では多数の芽型領域で覆われている (図における VII の領域)。全縮退の質量比から別の全縮退の質量比へ動かすと、芽型領域はアーチ型領域から分岐したものであることと、起源を異にする芽型領域が集積してアーチ型領域を再構成することが観察される。文献[3)]ではこのような芽型領域を説明するものとして、シュバルト軌道から分岐した周期軌道に着目した。ただし、左

右の質量を対称にした質量比の変化と左右の質量を非対称にした質量比変化かとで、後者による横断面上の定性的な変化は小さかったことから、文献[3]では対称な質量配置に限定している。これは、今回の研究でも踏襲する。シュバルト軌道は横断面上では不動点として現れるが、この点を中心とする回転数を導入してこれらの分岐軌道を分類したところ、文献[2]の芽型領域の主だったものは、特別な回転数を持つ周期軌道に付随する領域であることがわかった。その他の回転数を持つ周期軌道に対応する芽型領域は無視できるほど小さい。文献[1]における、横断面上の点の記号列による分類は、初期状態から最初の放出の終了までの衝突シーケンスで軌道を分類することに相当する。そのためこの分類で検出できる周期軌道はシュバルト軌道およびその娘軌道に限られ、その他の衝突シーケンスを持つ周期軌道は、捨象されてしまうという問題があった。

そこで、本研究ではシュバルト軌道とは異なる衝突シーケンスを持つ周期軌道に焦点を当て、質量比の変化による生成・消滅と軌道点の横断面上の移動を調べる。周期点を具体的に決める手段は文献[1]で横断面上の記号列の分布を使ってグラフィカルに決める方法を用いるが、今回はこの方法で周期点の座標を具体的に計算するのではなく、文献[2]による記号列の分布の形状についての知識を用いて、周期軌道のライフサイクルを定性的に議論することに重点を置き、数値計算はその議論が正しいことを確認するために1例示すに留める。

2 準備

2.1 運動方程式と横断面の定義

直線三体問題の運動方程式は式(A)をハミルトニアンとする正準方程式である。式(A)にて、左、中央、右の順に粒子名およびその質量を m_1、m_0、m_2 と、m_1・m_0 間および m_0・m_2 間距離を q_1、q_2 としている。本研究では、我々のシュバルト軌道の娘軌道な関連した先攻研究[3]に引き続き、全エネルギー $E=-1$、対称な質量配置 m_1=m_2 の場合を扱う。また、$m_1+m_0+m_2=3$ に規格化し、質量比をパラメタ a を用いて $m_1=m_2=1+a$, $m_0=1-2a$ と表す。この運動方程式で与えられる力学系の構造を調べるために Mikkola & Hietarinta(1989) による横断面 (θ, R) を導入する。θ の範囲は、$0 \leqq \theta < 360$°、$E<0$ の場合は R は質量に依存する上限値 $R_{\max}$ を持ち、R の範囲は、$0 \leqq R \leqq R_{\max}$ である。この横断面を Π_{all} とし、さらに $\theta=180°$ 線で分割し、$\theta<180°$ 側を Π、$\theta<180°$ 側を Π' とする。ここでは、パラメータ θ および R の定義はオリジナルの文献に譲り、R が系のスケールを決めるパラメータ、θ は $\dot{q}_1$ と $\dot{q}_2$ の間で速度を分配するパラメータであることを述べるに留める。また、Π_{all} 上にポアンカレ写像 T を導入しておく。すなわち、点 $p \in \Pi_{\text{all}}$ を初期値とする軌道が Π_{all} と p で Π_{all} から離れる向きと同じ方向で Π_{all} と交叉する最初の点を p' と置くとき、p から p' へ写すを写像を T と定義する。

2.2 記号列および関連する記法

軌道の振る舞いを衝突に注目した記号列で捨象する。すなわち、m_1、m_0 間衝突に '1' を、m_0・m_2 間衝突に '2' を、三体衝突に '0' を割り当て、軌道を衝突発生順に並べた記号からつくられる列で置き換える。また、以下では時刻 t=0 ではいづれの衝突も起こらないものとして、記号列を '.' で区切り、'.' より左側に $t<0$ の記号を $t>0$ の記号を配置するものとする。図1に軌道と記号列の対応の例を示す。　記号列の断片をワードと呼び、特定のワードを含む記号列からなる集合をシリンダと呼ぶ。シリンダの定義では、しばしば任意のワードの記法が必要になるが、これを '*' と書くことにして、例えば「$t=0$ 以降のはじめの記号がワード 21 の繰り返しで、その回数が最低3回」を満足するシリンダは、$\{*.(21)^n*|n \geqq 3\}$ と書くことにする。

横断面 Π_{all} 上の領域とシリンダとを関係づける演算子を定義しよう。初期値 $\text{p} \in \Pi_{\text{all}}$ を持つ軌道に対応する記号列を seq p とする。記号列の未来または

過去部分をそれぞれ seq $+ p$, seq $- p$ と書く。さらに、シリンダ C に対応する $\Pi_{\rm all}$ 上の領域を $[\![C]\!]$ とする。正確に書けば、この領域は $[\![C]\!] = \{p | p \in \Pi_{\rm all} \wedge {\rm seq}\ p \in C\}$ と定義される。

3 質量パラメータに関する周期軌道族

3.1 周期軌道の探索

周期軌道とは、$p = T^n p$ を自然数 $n \geqq 1$ で満たす点 p を通過点に持つ軌道で、このような n の内最小のものを周期と呼び、軌道点 $T^i p$ $(0 \leqq i \leqq n)$ を特に周期点と呼ぶ。周期点の座標を数値的に求めるには、素朴に写像 T^n の不動点をニュートン法など求める方法と記号列を利用する方法とがある。後者について、周期軌道であれば明らかに周期的な記号列を持つ。すなわち、ある有限の長さのワード w があって、記号列は $w^\infty.w^\infty$ となるはずである。したがって、はじめに $\Pi_{\rm all}$ 上の記号列の分布を数値積分によって求め、その情報をもとに $[\![\{w^\infty.w^\infty\}]\!]$ の領域を調べると、その領域が求める周期軌道の存在可能領域になる。一般に w の繰り返しにおいて、その境界と軌道の $\Pi_{\rm all}$ との交叉とは対応しないが、ある w' があって、$w = 2w'1$ または $w = 1w'2$ と書ける場合には、ワードの境界と軌道の $\Pi_{\rm all}$ との交叉とが対応する。この場合、$p \in [\![\{w^\infty.w^\infty\}]\!]$ は何回かの T の繰り返しで移る p' で再び seq $p' = w^\infty.w^\infty$ となるので、$[\![\{w^\infty.w^\infty\}]\!]$ は T の不変領域となる。従って、この特別な場合には、$[\![\{w^\infty.w^\infty\}]\!]$ は は当該周期点の安定領域かあるは不安定な場合には周期点そのものとなる。

領域 $[\![\{w\infty.w\infty\}]\!]$ を求める数値計算は、$[\![\{w\infty.w\infty\}]\!] = [\![\{w^\infty.*\}]\!] \cap [\![\{*.w^\infty\}]\!]$ を考慮すると、過去への積分 (右辺第一項) と未来への積分 (右辺第二項) とに分けられる。特に、今回扱う対称な質量配置の場合には、以下の定理 (b) が成り立つために、この分割が有効である。

定理 3.1 *(Tanikawa & Mikkola, 2000)* 一般に対称性 *(a)* が成り立ち、対称な質量配置のときはさらに対称性 *(b)* がなりたつ

(a) seq $\pm$ $(180^\circ + \theta, R) = {}^T{\rm seq} \mp (\theta, R)$

(b) seq $\pm$ $(\theta, R) = !{\rm seq} \mp (180^\circ - \theta, R)$

ただし、${\rm mirror}(\theta, R) = (180 - \theta, R)$、$w$ はワード、a は記号であって、$!(1w) = (!w)2$、$!(2w) = (!w)1$、$!(0w) = (!w)0$、および ${}^T(aw) = ({}^Tw)a$ と定義する。

定理 (b) は記号列 p.q を持つ領域に関する関係

(b') $[\![\{p.q\}]\!] = {\rm mirror}[\![\{!q.!p\}]\!]$

に書き換えることができて周期点の存在可能領域を求めるには、この形の方が便利である。この関係を用いると、周期軌道の存在可能領域は

$$[\![\{w^\infty.w^\infty\}]\!] = [\![\{*.w^\infty\}]\!] \cap [\![\{w^\infty.*\}]\!] = [\![\{*.w^\infty\}]\!] \cap {\rm mirror}[\![\{*.(!w)^\infty\}]\!] \quad (1)$$

で求まることがわかる。

式 (1) では、ワード w および (!w) の無限回の繰り返しを観察しなければならないが、以下の定理を考慮すれば、有限回の繰り返しが起こる領域を観察すれば、所望の精度で周期点の存在可能領域を定められることがわかる。

定理 3.2 $D_1^+ = [\![\{*.w*\}]\!]$, $D_1^- = [\![\{*w.*\}]\!]$ とおく。$D_1 = D_1^+ \cap D_1^- \neq \phi$ ならば $D_\infty = [\![\{w^\infty.w^\infty\}]\!]$ が存在する。ただし、以下の *(a)*, *(b)* が成り立つと仮定する。

(a) $w = 2w'1$ または $w = 1w'2$ である。

(b) D_1^+ 内の任意の三体衝突曲線と D_1^- 内の任意の三体衝突曲線とが横断的に交わる。

(証明) 仮定 (b) により $[\![\{*w.w*\}]\!]$ が存在する。この領域内の点を初期値とする軌道に対し、適当に時刻を並行移動することで $*.ww*$ および $*ww.*$ を持つ軌道がつくれる。仮定 (a) により 2 つの w 間で横断面の交叉が起こるため、これらの軌道の初期値は横断面上

に取れる。したがって、横断面上に $D_2^+ = [\![\{*.ww*\}]\!]$ および $D_2^- = [\![\{*ww.*\}]\!]$ が存在し、これらは再び仮定 (b) により空でない交叉 D_2 を持つ。同様の議論を繰り返すと D_∞ の存在が示せる。

3.2　周期軌道族の形状

ここからは、先行研究[2] の知見を踏まえてシリンダで指定される領域の具体的な形状を考慮に入れる。先行研究[2] によれば、ある (記号列の未来パートを分類する) シリンダ集合を用意して横断面を区分けすると θ 軸上の限られた点に収斂点を持つ領域に分割する。この収斂点は三体衝突多様体上の２つある平衡点のうち上方にある平衡点のセパラトリクスと横断面との交点である。そのため、McGehee[4] の三体衝突多様体上の流れの質量比に関する理論的な結果と結びつけることによって、中心質量を小さくすると流れが全縮退になる質量比[5] を通過する毎に、Π およびΠ’にそれぞれひとつずつ、最も $\theta=180°$ に近い収斂点になるように、追加されるという結果を得る。収斂点の個数を n_{cp} とすると、シリンダで指定される領域は、シュバルト領域 (シュバルト軌道の安定領域) と即時脱出領域 (n_{cp} 回以下衝突の後に系が分裂する領域) を除くと、異なる２点を収斂点とするアーチ型の領域と一点のみを収斂点とする芽型の領域とに分かれ、さらにそれぞれが堆積してアーチ型ブロックと芽型ブロックを構成する (図１)。

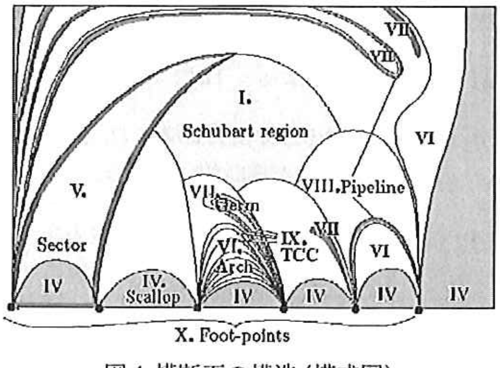


図１ 横断面の構造 (模式図)

先攻研究[2] で明らかにした、質量比の変化による横断面の構造変化は、アーチ型の領域 (図 1-VI) から分岐した多数の芽型の領域 (図 1-VII) が伸長および集積して、新しいアーチを構成し、さらに既存のアーチに含まれる記号列を入れ替える、と要約できる。そのため、式 (1) における交叉する領域 (のひとつ) が芽型ブロックである場合には、対応する周期軌道族の特性曲線は複雑なものになり、一般的な議論は難しい。しかし、他方で先攻研究[2] は領域 $[\![\{*.(21)^i(1)^j * |j \geqq 1\}]\!]$ は $1 \leqq i \leqq [n_{\mathrm{cp}}/2]$ で $[\![\{*.(21)^i(2)^j * |j \geqq 1\}]\!]$ は $i \leqq [(n_{\mathrm{cp}}-1)/2]$ で常にアーチ型を取ることを指摘している。以下ではこのような領域を基底領域と呼ぶことにする。基底領域内の周期軌道に対象を限定すれば、族の特性曲線の概形を数値計算に頼らずとも描くことができる。質量パラメタ a を下げたときの収斂点の挿入のされ方と収斂点とアーチ型領域との関係を考慮すると、Π 上の基底領域はこの a の変化によって、左に移動し、その鏡像は右側に移動する。したがって、基底領域とその鏡像の交叉領域にある周期点は、θ 軸に近いところで発生し、交叉領域がアーチの中央に移動するに従い、周期点の R 座標が大きくなり、交叉領域がもう片方の収斂点に近づくにつれて、再び周期点は θ 軸に近づく。

図２に a の低下に伴う交叉領域の推移と族の特性曲線の模式図を示す。交叉領域の表示では、縦軸は R を表し、横軸は高さが低い方のアーチが固定されて見えるような θ の相対座標を表す。この模式図では左側のアーチが高い場合を描いている。パネル (d) において、アーチの収斂点が２つとも重なっている。その理由を説明するためにアーチの収斂点の意味を再確認しておく。三体衝突多様体上の上方の平衡点の安定多様体と横断面との交叉点が記号列の未来部に対応するアーチの収斂点であり、同様に下方の平衡点の不安定多様体が過去部に対応する収斂点である。この安定多様体と不安定多様体は、特別な質量比で全体が一致する場合 (このときの流れを全縮退という) を除き、一般には交叉しない。そのため、そのような特別な質量で、すべてのΠ上の収斂点はこれと重なるΠの鏡像上の収斂点を持つ (逆も同様である)。

パネル (d) はまさにそのような場合を描いている。パネル (g) はパネル (b) から (e) への推移に相当する特性曲線を $a - R$ 平面に描いたものである。アーチが左右に張り出している場合には、収斂点での接触より前に (あるいは収斂点での分離よりも後で) 2つのアーチが接触することがある。この可能性は、接触の開始時、重なりが最大になるとき、接触の終了の3箇所であるが、ここでは接触の開始時を例にとり a の低下に伴う推移を図3のパネル (a')〜(c') に対応する特性曲線をパネル (d') に示す。

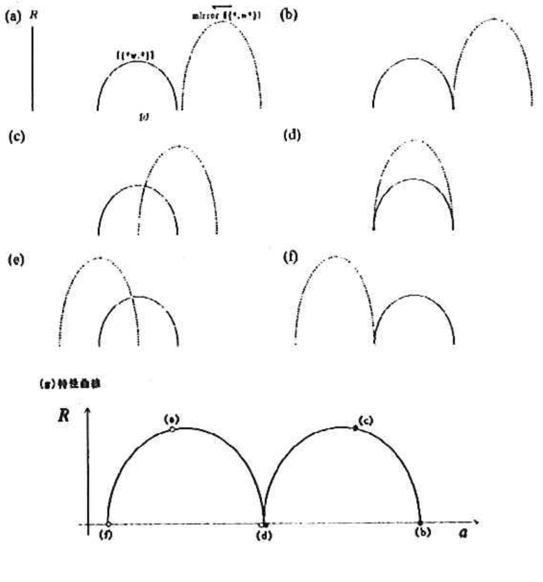


図2 アーチ型領域の交叉の推移 (a)〜(f) と族の特性曲線 (g) の模式図

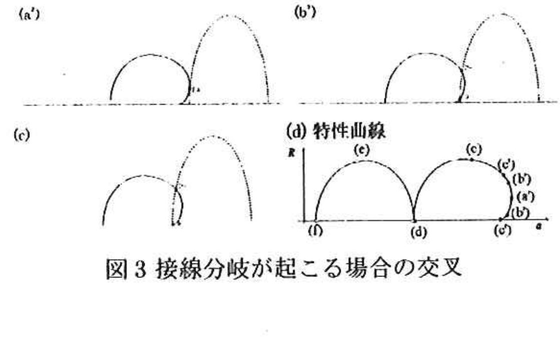


図3 接線分岐が起こる場合の交叉

4　数値計算例

シュバルト (およびその娘) 軌道は記号列 $(21)^\infty.(21)^\infty$ を持つ。これ以外の周期的な記号列を持つ周期軌道が非シュバルト周期軌道である。3.2 節の議論によれば、このような非シュバルト周期軌道は無数に生じるのであるが、先攻研究[3]では記号列 $(21121)^\infty.(21121)^\infty$ を持つ周期軌道が質量比 $a = 0.019$ で無視できない大きさの安定領域を持つことを確認した。そこで例として、軌道点のひとつの R 座標と質量パラメタ a との関係の形で、この周期軌道の特性曲線を数値的に求めることにした。この周期軌道は θ 軸からある程度遠いところではニュートン法による不動点の算出が安定する。この方法で求めた、図3の模式図での (b)〜(d) のフェーズに対応する特性曲線を図4に示す。領域の交叉によって周期点の位置を決定する方法が正しいことを確認するために、パネル (a) で、×印をつけた4点について、$[\![\{*.(21121)^2*\}]\!]$ と $[\![\{(21121)^2.*\}]\!](= \mathrm{mirror}[\![\{*.(21121)^2*\}]\!])$ の横断面上に示す (図5)。図5 (a)、(b) のアーチの形状は、一見すると、最初の接触が収斂点で起こるように見える。しかし、特性曲線の右端近傍を拡大した図4(a) は放物線状をしており、その頂点が $a = 0.021$、$R = 0.5$ 近傍にあるように見える。そのため、この近傍で接線分岐が起こり、$0.020 \leqq a \leqq 0.021$ に放物線の下半分に対応する曲線が期待される。その予想を確かめるために、$a = 0.019$ および $a = 0.020$ で収斂点近傍の記号列分布を高解像度で計算し、交叉の様子をそれぞれ図5(c)、(d) に描いた。$a = 0.020$ では2箇所での交叉が見られる。一方、交叉を持たない $a > 0.020$ なる a の値があるため、その中間のある a で接線分岐が発生するが結論できる。$a = 0.019$ では交叉領域は1箇所である。図3 (d') の特性曲線と対応させると、$a = 0.020$ は (b') に、a=0.019 は 区間 (c')〜(c) に対応する。そのため収斂点が一致する (c') に対応する質量は $0.019 < a < 0.020$ にあることになる。この範囲に全縮退となる質量がなければならないが、実際に三体多様体上の運動方程式を数値的に計算して調べた全縮退の質量は a ≒ 0.0198 である。

(a) 全体　　(b) 端点の拡大

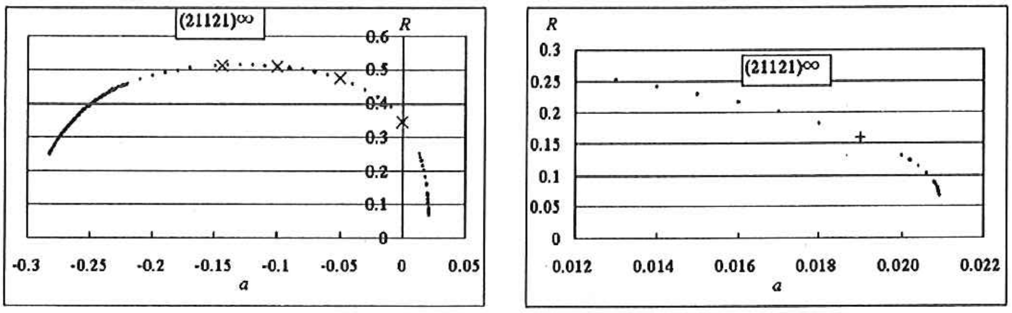
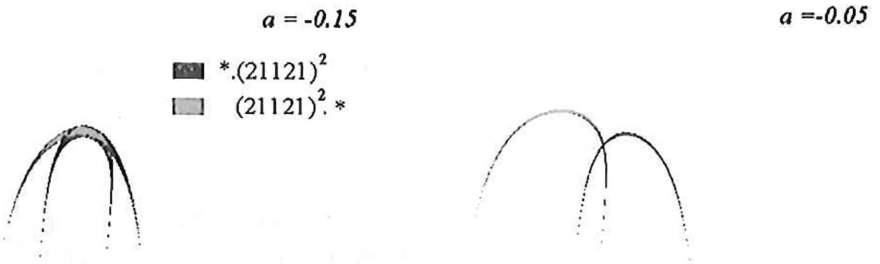


図 4 記号列 (21211) ∞.(21211) ∞を持つ周期軌道の特性曲線

(a)$a = -0.15$　　(b)$a = -0.05$



(c)$a = 0.019$　　(d)$a = 0.020$

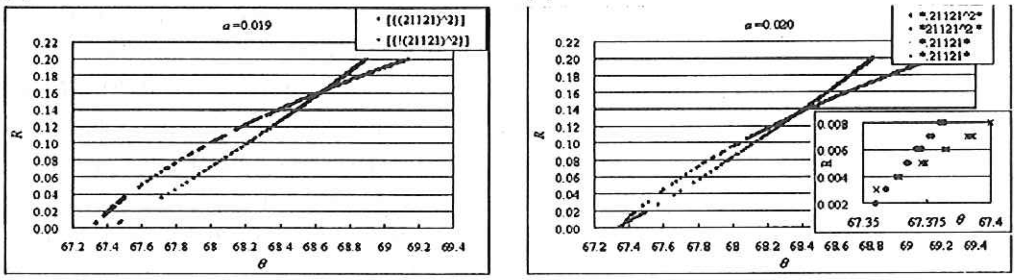


図 5 記号列によって求めた (21121) ∞を持つ周期軌道の存在可能領域

参考文献

[1] Tanikawa, K., Mikkola, J., CHAOS **10**, pp.649-657, 2000

[2] Saito, M.M., Tanikawa, K., CMDA **98**, pp. 95-120, 2007

[3] Saito, M.M., Tanikawa, K., preprint, arXiv:0711.1957

[4] McGehee, R., Inventiones Mathematicae **27**, pp.191-227, 1974

[5] Simó, C., CMDA **21**, 25-36 (1980)

[6] Mikkola, S., Hietarinta, J., CMDA **46**, pp.1-18, 1989

[7] Hietarinta, J., Mikkola, S., CHAOS **3**, pp.183-203, 1993

(2008 年 3 月 23 日受付，2008 年 6 月 15 日受理)