

N体問題舞踏解存在の計算機援用証明について (Review)

関口 昌由

木更津工業高等専門学校,

A review on computer assisted proofs of the existence of N -body choreographies

Masayoshi SEKIGUCHI

Abstract

In the present paper, we review the recent computer assisted proofs of the existence of choreographies in the Newtonian N -body problem, and their related topics.

Key Words: choreography, computer assisted proof, rigorous computing

1 はじめに

近年、Chenciner & Montgomery [2] による三体問題 8 の字解の存在証明に触発されて、 N 体問題舞踏解の研究が盛んになった。まず、数値計算によって多くの舞踏解が発見され [8, 9, 10]、それらの力学的性質が数値計算で研究された [11]。ところが、存在証明に関して言うと、その研究成果は決して芳しいとは言えない。多くの研究論文が出版されており、存在証明された舞踏解も数多いものの、Simó[10] で示されたような対称性の低い舞踏解については、新しい結果は得られなかった。

一方、存在証明に対する、Chenciner & Montgomery[2] とは全く異なるアプローチがあった (Kapela & Zgliczyński [3])。それは、精度保証付き数値計算に基づく計算機援用証明によるものであった。さらに 2007 年、Kapela & Simó[4] は、Simó[10] で見られた時間遅れ以外には対称性がない舞踏解 (図 2,3 参照) の存在を精度保証付き数値計算を用いて証明した。

本稿では、周期解存在の計算機援用証明に関連する最近の状況を紹介したい。

2 N 体問題舞踏解

最初に発見された舞踏解は、三体問題における 8 の字解であり (Moore [7])、その特徴によって舞踏解の定

義が与えられたとあってよい。すなわち、すべての質点は同一閉曲線上を等時間間隔で運動する、というものである。その軌道の形は図 1 に示されるとおりであり、対称性の高い形状をもつ。運動における対称性を説明するために、軌道上で特徴的な点に番号を付けておいた。また、表 1 には、時間に沿った質点配置の遷移を示した。

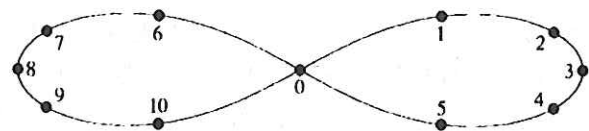


図 1: 三体問題 8 の字解の軌道

表 1: 8 の字解上での配置の遷移

時刻	m_1	m_2	m_3	時刻	m_1	m_2	m_3
0	0	4	7	$6t_0$	0	9	2
t_0	1	5	8	$7t_0$	6	10	3
$2t_0$	2	0	9	$8t_0$	7	0	4
$3t_0$	3	6	10	$9t_0$	8	1	5
$4t_0$	4	7	0	$10t_0$	9	2	0
$5t_0$	5	8	1	$11t_0$	10	3	6

8 の字軌道上を運動する 3 体は直線配置と二等辺三角形配置を交互に経験する。各質点は軌道に沿って図 1 に示された数字の順に周回する。時刻 $t = 0$ で 3 体

が直線配置 (0-4-7) にあったとしよう。すなわち m_1 が数字 0 の位置に、 m_2 が 4 の位置に、 m_3 が 7 の位置にあったとすると、時刻 $t = t_0$ において 3 体は二等辺三角形配置 (1-5-8) に移る。ただし、 $T = 12t_0$ は 8 の字解の周期である。その後 3 体は時刻 $t = 2t_0$ で、直線配置 (2-0-9) に移る。以下同様に 3 体は等時間間隔で連鎖的に追跡する。すなわち、時刻 t における質点 m_i の座標を $q_i(t)$ であらわすと、

$$q_2(t) = q_1\left(t + \frac{T}{3}\right), \quad q_3(t) = q_1\left(t + \frac{2T}{3}\right), \quad (1)$$

が成立する。周期 T にわたる 3 体の配置の変化を表 2 にまとめた。記号 t_0 は周期 T の 12 分の 1 を表す。数字は図 1 に現れる位置を示している。なお [8] では、Simó によって作成された優れたアニメーションを楽しめる。

図 2 と図 3 の舞踏解は非対称なもの代表例であるが、等時間間隔で軌道を巡る性質は保たれている。いずれも [9] で、それらの運動を見ることが出来る。また、Kapela & Simó によって存在も証明された [4]。

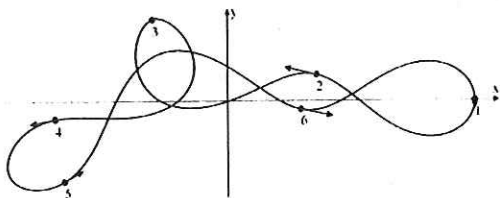


図 2: 6 体問題の非対称舞踏解

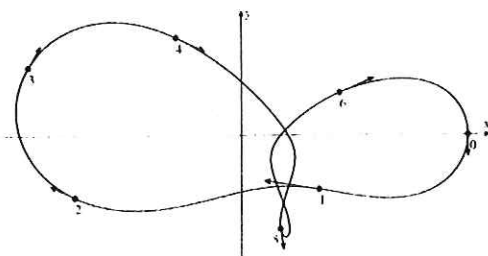


図 3: 7 体問題の非対称舞踏解

3 計算機援用証明

ここでは、精度保証付き数値計算を用いた証明に注目する。その他の話題については [5, 6] を参照されたい。

3.1 精度保証付き数値計算

数値計算の各ステップで発生する誤差を厳密に評価し、増大しないよう工夫することで精度を保証する計算法である。不動点定理などの理論的な方法を併用すれば、存在証明に利用できる。力学系への応用については、[1] にうまくまとめられている。発生しうる誤差は、

- 微分方程式の離散化に伴う誤差
- ポアンカレ断面との交差を求めるときに生じる誤差
- 丸め誤差

である。

これまで個人的には、離散化の方法として 4 次のルンゲクッタどころか、さらに高次の公式を用いるのが当たり前と考えてきたが、精度保証をしたいときには、あまり複雑な公式は好ましくない。誤差評価をする計算に手間取るからである。したがって、低次の陽的公式が好ましい。

3.2 区間演算

浮動小数点数 X を、区間を用いて

$$X = [\underline{X}, \overline{X}]$$

のように表現する。 $\underline{X}, \overline{X}$ は区間の下端と上端である。そこで、浮動小数点数同士の演算を、区間同士の演算で置き換える区間演算という考え方が生まれてくる。基本的な考え方は、誤差の伝搬を区間で表現する、ということである。区間同士の加減乗除は以下のように定義される。

$$X = [\underline{X}, \overline{X}], \quad Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$$

に対して、

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}]$$

$$X - Y = [\underline{X} - \overline{Y}, \overline{X} - \underline{Y}]$$

$$X \cdot Y = [\min(\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}), \max(\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y})]$$

$$X/Y = X \cdot Y^{-1}$$

ただし、 $Y^{-1} = [1/\overline{Y}, 1/\underline{Y}]$ である。誤差は、区間の直径 $d(X) = \overline{X} - \underline{X}$ で評価される。たとえば、

$$d(X + Y) = d(X - Y) = d(X) + d(Y)$$

となる。誤差評価をまともに行うと、過大評価になりがちであることに注意が必要である。

3.3 クラフチック法

精度保証付き数値計算が厳密な証明を与える根拠は以下のクラフチック法にある。浮動小数点数を扱っているので、数は区間と同等に使われる点に注意したい。

- 記法
- $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^1 級関数
 - $X \subset \mathbb{R}^n$ はある閉区間
 - $\bar{x} \in X$
 - $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は線形同形

クラフチック作用素

$$K(\bar{x}, X, F) := \bar{x} - CF(\bar{x}) + (Id - C[DF(X)])(X - \bar{x})$$

ただし、 $[DF(X)]$ は集合 X 上で計算された導関数の区間包を表す。

- 定理
1. $x^* \in X$ and $F(x^*) = 0$, ならば $x^* \in K(\bar{x}, X, F)$
 2. $K(\bar{x}, X, F) \subset \text{int}X$, ならば $F(x) = 0$ の解がただ一つだけ X に存在する。
 3. $K(\bar{x}, X, F) \cap X = \emptyset$ ならば、すべての $x \in X$ に対して $F(x) \neq 0$ である。

定理2は不動点定理である。ここで、 F や DF は未知であるから、数値計算結果を利用して推定することになる。また、 C はある行列であるが、 $DF(\bar{x})$ の逆行列を選ぶのが最適であろう。

4 舞踏解存在証明の概略

Kapela & Zgliczyński[3] は三体問題8の字解、4体問題超8の字解、6体問題2重対称線形鎖解の存在証明を行った。Kapela & Simó[4] は6体問題と7体問題の非対称舞踏解(図2, 図3)の存在証明等を行った。

Chenciner & Montgomery [2] は、三体問題8の字解の存在証明にあたり、閉曲線の空間を想定し、ラグランジアンに基づく作用積分を最小化する経路の存在を証明した。一方、Kapelaたちの証明では、初期値の集合だけを考える狙い撃法を前提とする。

初期値の集合をポアンカレ断面上に取る。その初期値集合が周期解の初期値を含んでいれば、数値積分の後、同じ断面上に軌道の束が戻り、交差する。とくに周期解は、初期値と同じ点に戻る。したがって、周期解を求める問題は、あるベクトル値関数 $F(X)$ の零点 $F(X) = 0$ を求める問題に帰着される。ただし、 X は初期値集合の点であり、 $F(X)$ はおなじポアンカレ断面上の点である。

Kapelaたちは、多次元区間ニュートン法やクラフチック法を利用する。多次元区間ニュートン法は近似解を求めるために用い、クラフチック法はその近似解の近傍に真の解が存在することを証明するために用いる。証明の核心は、クラフチック法の仮定を満たす初期値区間を見いだせるか否かにかかっている。

5 おわりに

精度保証付き数値計算を実装したソフトウェアが存在する。MATLAB上のマクロパッケージであるGAIOやb4m、あるいはC言語用区間演算ライブラリのBIAS、C++言語用区間演算ライブラリのPROFIL、Zgliczyńskiらが開発したパッケージであるCAPDなどがある。

参考文献

- [1] 荒井迅, 2006, 「精度保証付き数値計算の力学系への応用について」, 京都大学数理解析研究所講究録, 1485, pp. 1-13
- [2] Chenciner, A. and Montgomery, R., 2000, *A Remarkable Periodic Solution of the Three-Body*

Problem in the case of Equal Masses, Ann. Math. **152**, 881–901.

- [3] Kapela, T., and Zgliczyński, P., 2003, *The Existence of Simple Choreographies for the N-body Problem — a computer assisted proof*, Nonlinearity, **16**, 1899–1918.
- [4] Kapela, T., and Simó, C., 2007, *Computer assisted proofs for non-symmetric planar choreographies and for stability of the Eight*, Nonlinearity, **20**, 1241–1255.
- [5] 荻田武史, 2004, 「計算機援用証明 I」, 応用数理, **14**, pp. 2–11. (Rump, S. M., 2005, *Computer assisted proofs and self-validating methods*, in “Handbook on Accuracy and Reliability in Scientific Computation”, pp. 195–240, SIAM の抄訳前半)
- [6] 荻田武史, 2004, 「計算機援用証明 II」, 応用数理, **14**, pp. 44–57. (同上後半)
- [7] Moore, C., 1993, *Braids in Classical Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3675–3679.
- [8] Simó, C., 2000, *Choreographies of the Planar Three Body Problem*, <http://www.maia.ub.es/dsg/3body.html>
- [9] Simó, C., 2000, *N-body Choreographies*, <http://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html>
- [10] Simó, C., 2001, *New Families of Solutions in N-body Problems*, Proceedings of European Congress of Mathematics (Barcelona), Progress in Math. **201**, Birkhauser, 101–115.
- [11] Simó, C., 2002, *Dynamical Properties of the Figure Eight Solution of the Three-Body Problem*, Contemp. Math. **292**, 209–228.

(2008年3月22日受付, 2008年6月15日受理)