Spaceguard Research Vol. 1, 66 - 69 (2008)

新しい準周期軌道とマーザーの連結軌道

New quasiperiodic orbits and Mather's connecting orbits

山口喜博 (Y.Yamaguchi) 帝京平成大学

谷川清隆 (K.Tanikawa) 国立天文台

概要

Mather's connecting theorem is proved with elementary geometrical method using the reversibility of the standard mapping. In the proof of the existence of orbits connecting quasi-periodic orbits of the same rotation number, non-monotone quasi-periodic orbits (NMQs) are found, in which almost all orbital points are located in the gap of the Aubry–Mather set. The dynamical order relations among NMQs are derived. The existence of orbits connecting orbits of different irrational rotation numbers is proved using also non-Birkhoff periodic orbits of Farey type.

1 目的

マザー [1, 2] によって証明されたいくつかの軌道は, 非常に興味深い性質を有している. 本論文で得られた我々の結果を述べるためにマーザーの２つの定理を紹介する. 最初はオーブリー・マザー集合の存在に関する定理である. ２つ目はバーコフの不安定領域におけるマザーの連結軌道の存在に関する定理である. 特に連結軌道に関しては, この論文で詳細に議論する. 流量ゼロ条件を満たし面積保存でかつ方向保存ねじれ写像を「完全面積ならびに方向保存ねじれ写像」(Exact area- and orientation-preserving twist map) と呼び, EAPT と表す.

定理 A (オーブリー–マザー [1, 2, 3]). EAPT において, 任意の回転数 ω に対してオーブリー・マザー集合と呼ばれる作用最小不変集合が存在する. オーブリー・マザー集合のそれぞれの点は, $\mathbf{S}^1$ のカントール集合に 1 対 1 に射影される. オーブリー・マザー集合のそれぞれの点の軌道は, 円筒面を回転し回転数 ω をもつ.

回転数 ω をもつ作用最小軌道の集合を Σ_ω と書く. 良く知られているようにこの集合は再帰成分と非再帰成分で構成されている [5, 6]. 再帰成分 $\Sigma_\omega^{\rm rec}$ がオーブリー・マザー集合と呼ばれている. 以下では AM 集合と略記する. 回転数 ($\omega = p/q$) が有理数の場合, $\Sigma_\omega^{\rm rec}$ は回転数 p/q をもつサドル型周期軌道の点の有限集合である. これらを p/q-バーコフ型サドル周期軌道 (p/q-BS) と呼ぶ. 非再帰成分は, これらのサドルに２重漸近する軌道である. 系が積分可能な特殊な場合では, $\Sigma_{p/q}$ はひとつの曲線に縮退している.

回転数 ω が無理数の場合, $\Sigma_\omega^{\rm rec}$ は KAM (Kolmogorov–Arnold–Moser) 曲線またはカントール集合である. 後者はしばしばカントーラスと呼ばれる. このカントール集合は回転数 p_n/q_n をもつ作用最小周期軌道の列の極限 ($\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = \omega$) として得られる [7]. $\Sigma_\omega^{\rm rec}$ がカントール集合である場合, カントール集合のギャップを Δ_ω で表現する. Σ_ω の非再帰成分はカントール集合の端点に漸近する軌道を構成する. これらの軌道は Δ_ω の中に存在している事に注意する. バンガート [5] は, $\Sigma_\omega^{\rm rec} = \Sigma_\omega$ が成立すると予想している. この予想が正しければ, 一般の系では Δ_ω の中に作用最小軌道は存在しない.

ここでを $\mathcal{Z}(\omega_-, \omega_+)$ をバーコフの不安定領域 [8] とする. ω_- と ω_+ ($\omega_- < \omega_+$) は不安定領域の下部と上部の境界をなす KAM 曲線の回転数である.

定理 B (マザーの連結軌道定理). EAPT における不安定領域 $\mathcal{Z}(\omega_-, \omega_+)$ の回転数区間 $[\omega_-, \omega_+]$ に含まれる任意の２つの回転数 ω, $\omega' \in [\omega_-, \omega_+]$ に対して, 次の条件を満たす点 $z \in \mathcal{Z}(\omega_-, \omega_+)$ が存在する. 点 z の $\omega(\alpha)$ 極限集合が $\Sigma_\omega^{\rm rec}$ ($\Sigma_{\omega'}^{\rm rec}$) に含まれる. た

だし $\omega = \omega_-$ $(\omega' = \omega_+)$ の場合, ω (ω') は無理数である.

これより ω が無理数である場合を議論する. マーザーの連結軌道は, 局所的作用極小軌道であるが大域的作用最小軌道ではない. この軌道の円筒面上の変数 $\tilde{x}_i$ の連続的な点列を, 普遍被覆面に持ち上げる. 持ち上げた双無限列を $(\ldots, x_i, \ldots)$ とする. 普遍被覆面上の点 x_i は区間 J_i の内点にある. また大きな $|i|$ に対して束縛性条件を満たす. この列で x_i は単調に増大する. しかし拡張軌道 [8] を考えた場合には軌道点の左右の関係が入れ替わるノンバーコフ型の軌道である.

定理Bはカロシン [9] によって異なった方法で証明された. カロシンは AM 集合の任意の点の固有値の絶対値が1でなく, かつその点の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差しているという条件をおいた. これによってマザーの長い証明が簡単化された.

この論文で, 我々もマーザーの連結軌道の別の証明を行った (定理 2). ねじれ写像が次の2つの性質をもつとして証明をした. 最初の性質はバーコフの意味での可逆性である. 写像の可逆性が変分法の代わりとなる. 証明は初等的であり方法が簡単である. その結果, 連結軌道の幾何学的なイメージがより明瞭となり, 具体的な軌道の例を示すことができる. これらの結果は簡単に他の系にも適用できる. 第2の性質はバーコフ軌道に関する弱い双曲性とその個数に関するものである. 以下ではこれらを「前提条件」と呼ぶ事にする. 我々が得た結果である定理1,2,3と4は前提条件が無くても証明できる. 前提条件を置く事で証明が簡単になる.

ここで定理Bに対してコメントをしておこう. 定理Bの内容は $\omega \neq \omega'$ であるか $\omega = \omega'$ であるかによって異なる. $\omega \neq \omega'$ の場合, 定理Bは回転数 ω と ω' の異なった準周期軌道をつなぐヘテロクリニック軌道の存在を与えている. これは2つ以上の軌道をつなぐ軌道の存在も示唆している. $\omega = \omega'$ の場合, 連結軌道の未来の回転数も過去への回転数も ω である. つまりこの軌道はホモクリニック準周期軌道である. このような軌道の中で, AM 集合が存在しているリプシッツ曲線より軌道が外に出るような性質をもつ準周期軌道が存在する. 外に出る少数の軌道点のために, この軌道は単調な軌道ではない. これは新しいタイプの準周期軌道である. この軌道を単調でない準周期軌道と呼び, NMQ と記す. 2つの NMQ がサドルノード分岐を経て生じる. マーザーの連結軌道は局所的作用極小軌道である. しかしここで得られた軌道に対して変分法における作用を計算していないので, この軌道が作用極小軌道なのか, 作用極大軌道なのか, また作用ミニマックス軌道なのか分からない. しかしながら2つの軌道のひとつは作用極大軌道または作用ミニマックス軌道である.

興味ある疑問の一つに「AM 集合のギャップ Δ_ω にどのような軌道があるのだろうか」がある. これは自然な疑問である. カントール集合に2重漸近する作用ミニマックス準周期軌道がギャップの中に存在することは分かっている [12]. これ以外の軌道の存在については分かっていない. この論文では上記の疑問に対し定理1を回答として提示する.

定理2はマーザーの連結定理に相当する定理である. 定理2は NMQ の出現順序関係を与える. また定理4は, 連結軌道に対する出現順序関係を与える.

2 写像ならびに結果の紹介

標準写像 $\widetilde{T}$ は円筒面 $(\tilde{x} \in \mathbf{S}^1, y \in \mathbf{R}^1)$ で定義された EAPT である. 標準写像は次のように記述される.

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + f(\tilde{x}_n), && (1)\\
\tilde{x}_{n+1} &= \tilde{x}_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. && (2)
\end{aligned}
$$

ここで $f(x) = a \sin x$ であり a は正のパラメータである. 性質 $\int_0^{2\pi} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = 0$ が成立することより, $\widetilde{T}$ は流量ゼロ条件を満たす.

標準写像はバーコフの意味で可逆である. つまり標準写像は2つの対合 $\widetilde{H}$ と $\widetilde{G}$ の積で書かれる.

$$\widetilde{T} = \widetilde{H} \circ \widetilde{G}. \tag{3}$$

2つの対合 $\widetilde{H}$ と $\widetilde{G}$ は以下のように定義されている.

$$\widetilde{H}(\tilde{x}, y) = (y - \tilde{x}, y), \tag{4}$$

$$\widetilde{G}(\tilde{x}, y) = (-\tilde{x}, y + f(\tilde{x})). \tag{5}$$

これらは左右の対称性を記述している [11, 12].

この論文では全ての議論を円筒面の持ち上げである普遍被覆面 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ で行う．普遍被覆面での座標として (x,y) を用いる．標準写像の持ち上げ T は単調ねじれ条件 $\partial(x_{n+1}-x_n)/\partial y_n = 1 \neq 0$ を満たす．普遍被覆面における対称線は下記のように得られる．

$$S_G(n) \ : \ x = n\pi, \tag{6}$$

$$S_H(n) \ : \ y = 2(x - n\pi). \tag{7}$$

ここで n は整数．本論文では対合と対称線ならびにその像を利用して定理1から4までの証明を行う．この手法を，バーコフの可逆性を利用した証明法と呼ぶ．

ここで前提条件を提示する．前提条件の意味については参考文献 [12] に議論されている．

前提条件．

(I) バーコフサドルの安定多様体と不安定多様体は互いに横断的に交差している．

(II) それぞれの回転数に対してバーコフ周期軌道は2個ある．

次に我々の主たる結果である定理1から4までを紹介する．証明は参考文献 [14] にある．

定理 1． 標準写像においてバーコフの不安定領域 $\mathcal{Z}(\omega_-,\omega_+)$ が存在すると仮定する．$\omega\in(\omega_-,\omega_+)$ は無理数であると仮定する．列 $\{p_i/q_i\}_{i\geq 1}$ を，削除シュテルン-ブロコ木 (Trimmed Stern–Brocot tree:TSBT) における無理数 ω に漸近する有理数の列とする [13]．ここで $k\geq 1$ を満たすある整数 k に対して p_k/q_k–NBF が存在すると仮定すると下記の (i) と (ii) が成立する．
(i) $n\geq k$ を満たす整数 n に対して，単調性を満たさない準周期軌道 $\frac{p_n}{q_n}\oplus\omega$–NMQ が存在する．
(ii) 極限 $n\to\infty$ において $\frac{p_n}{q_n}\oplus\omega$–NMQ はオーブリー・マザー集合 $\Sigma_\omega^{\mathrm{rec}}$ の端点に集積するか，またはオーブリー・マザー集合のギャップにある作用ミニマックス準周期軌道に漸近する．

定理 1(i) と (ii) で用いた記号の意味を説明する．有理数 p_k/q_k のファレイ分割を $\mathrm{FP}[p_k/q_k] = [p_k^l/q_k^l, p_k^r/q_k^r]$ とする．ここで $p_k = p_k^l + p_k^r$，$q_k = q_k^l + q_k^r$ である．ただし条件 $p_k^r/q_k^l - p_k^l/q_k^r = 1$ が成立しているとする．このような回転数をもつノンバーコフ周期軌道を p_k/q_k–NBF と書く [12]．また $p_k^l/q_k^l \oplus p_k^r/q_k^r$–NBF とも書く．次に $\frac{p_n}{q_n}\oplus\omega$–NMQ の意味を説明する．この軌道の過去と未来はともに ω–AM のギャップに中にあり続ける．そして軌道の途中で回転数 p_n/q_n をもつバーコフ周期軌道の共鳴領域に入る運動である．定理 1(i) は新しいタイプの準周期軌道の存在を与え，定理 1(ii) はこれらの軌道と AM 集合との関係を与える．定理 1(ii) より次の事が分かる．ω へ向かう TSBT の中の径路 $\{p_i/q_i\}_{i\geq 1}$ を下って行くとする．このとき経路上の回転数をもつ p_i/q_i–NBF の極限は，オーブリー・マザー集合 $\Sigma_\omega^{\mathrm{rec}}$ の端点であるかオーブリー・マザー集合のギャップにある作用ミニマックス準周期軌道である．これはカトック [6] の特徴付けとは異なる，AM 集合の新しい特徴付けである．

定理2を述べるために連結軌道を定義する．軌道 $O(z_0)$ を考える．z_0 の ω–極限集合が軌道 O_2 に含まれ，α–極限集合が軌道 O_1 に含まれるとする．このとき軌道 $O(z_0)$ を2つの軌道 O_1 と O_2 を連結する軌道と呼び，記号 $\mathcal{H}(O_1,O_2)$ と表現する．2つの軌道 O_1 と O_2 周期的な場合の連結軌道の集合を $\mathcal{H}(p/q,p'/q')$ と書く．ζ_ω を ω–AM が存在しているリプシッツ曲線とする．これは ω–AM，作用ミニマックス準周期軌道ならびに Δ_ω を含む．ここで O_1 が ζ_ω で O_2 が $\zeta_{\omega'}$ である場合の連結軌道の集合を $\mathcal{H}(\omega,\omega')$ と記す．また $\mathcal{H}(\omega,p/q)$ と $\mathcal{H}(p/q,\omega)$ も用いる．

定理 2． $\omega_- < p'/q' < \omega' < \omega < p/q < \omega_+$ が成立すると仮定する．
(i) $p/q\oplus p'/q'$–NBF が存在するならば，単調でない連結軌道 $\mathcal{H}(p/q,p'/q')$ と $\mathcal{H}(p'/q',p/q)$ が存在する．
(ii) $p/q\oplus p'/q'$–NBF が存在するならば，単調でない連結軌道 $\mathcal{H}(\omega,\omega')$ と $\mathcal{H}(\omega',\omega)$ が存在する．
(iii) $p/q\oplus p'/q'$–NBF が存在するならば，単調でない連結軌道 $\mathcal{H}(p'/q',\omega)$, $\mathcal{H}(\omega,p'/q')$, $\mathcal{H}(p/q,\omega)$ ならびに $\mathcal{H}(\omega,p/q)$ が存在する．

定理3と4で使用する矢印記号について説明する．記号 $A\to B$ は，A の存在が B の存在を導くと読む．

定理 3． 標準写像においてバーコフの不安定領域 $\mathcal{Z}(\omega_-,\omega_+)$ が存在すると仮定する．ω と ω' は無理数とし，p/q と p'/q' は有理数とする．これらは開区間 (ω_-,ω_+) にあるとする．

(i) $\omega_- < \omega < \frac{p'}{q'} < \frac{p}{q} < \omega_+$ または $\omega_- < \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < \omega < \omega_+$ の場合, 次の順序関係が成立する.

$$\frac{p}{q} \oplus \omega\text{–NMQ} \to \frac{p'}{q'} \oplus \omega\text{–NMQ}. \tag{8}$$

(ii) $\omega_- < \omega < \omega' < \frac{p}{q} < \omega_+$ または $\omega_- < \frac{p}{q} < \omega' < \omega < \omega_+$ の場合, 次の順序関係が成立する.

$$\frac{p}{q} \oplus \omega\text{–NMQ} \to \frac{p}{q} \oplus \omega'\text{–NMQ}. \tag{9}$$

(iii) $\omega_- < \omega < \omega' < \frac{p'}{q'} < \frac{p}{q} < \omega_+$ または $\omega_- < \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} < \omega' < \omega < \omega_+$ の場合, 次の順序関係が成立する.

$$\frac{p}{q} \oplus \omega\text{–NMQ} \to \frac{p'}{q'} \oplus \omega'\text{–NMQ}. \tag{10}$$

定理 4.
(i) $p'/q' \leq r'/s' < r/s \leq p/q$ の場合, 下記の順序関係が成立する.

$$\mathcal{H}(p'/q', p/q) \to \mathcal{H}(r'/s', r/s). \tag{11}$$

(ii) $\omega' \leq \Omega' < \Omega \leq \omega$ の場合, 下記の順序関係が成立する.

$$\mathcal{H}(\omega', \omega) \to \mathcal{H}(\Omega', \Omega). \tag{12}$$

(iii) $p'/q' < \omega' < \omega < p/q$ の場合, 下記の順序関係が成立する.

$$\mathcal{H}(p'/q', p/q) \to \mathcal{H}(\omega', \omega). \tag{13}$$

(iv) $\omega' < p'/q' < p/q < \omega$ の場合, 下記の順序関係が成立する.

$$\mathcal{H}(\omega', \omega) \to \mathcal{H}(p'/q', p/q). \tag{14}$$

参考文献

[1] J. Mather, Topology **21** (1982), 457.

[2] J. Mather, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 207.

[3] S. Aubry and P. LeDaeron, Phisica **8D** (1983), 381.

[4] V. Bangert, *Dynamics Reported*, Vol.1 (John Wily & Sons, 1988), 1.

[5] J. D. Meiss, Rev. Mod. Phys. **64** (1992), 795.

[6] A. Katok, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982), 185.

[7] G. Birkhoff, Acta. Math. **43** (1920), 1. *Collected Math. Papers*, Vol.II,530.

[8] K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* (Springer-Verlag, 1992).

[9] V. Kaloshin, *Topics in Dynamics and Ergodic Theory*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series. (Cambridge Univ. Press, 2003). 81.

[10] A. Katok and B. Hasselbratt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge Univ. Press,1995).

[11] R. de Vogelaere, in *Contribution to the theory of nonlinear oscillation*, Vol. IV, ed. S. Lefschetz (Princeton University Press, 1958), 53.

[12] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **117** (2007), 601.

[13] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **118** (2007), 675.

[14] Y. Yamaguchi and K. Tanikawa, Prog. Theor. Phys. **119** (2008). 4月号に掲載予定.

補遺

Action minimizing orbit の翻訳について.

この報告では, 前後の文脈より意味を考え「作用最小軌道」または「作用極小軌道」と訳した.

連絡先

Y.Yamaguchi: yy-chaos@jb3.so-net.ne.jp
K.Tanikawa: tanikawa@exodus.mtk.nao.ac.jp

(2008年3月22日受付, 2008年6月15日受理)